数理解析研究所講究録
993 巻 1997 年 252-258

Dynamics of Thin-Jet Sheets in Ocean

理研 山田裕康 (YAMADA Hiroyasu)[1]
名大理 吉森明 (YOSHIMORI Akira)[2]

1 はじめに

海流蛇行のダイナミクスは, 暖水渦や冷水渦の生成機構と関連しており, 様々な観点からの解析が行なわれている. とくに海流を細く強い流れとみる thin-jet 近似では, 流速の変化が jet を横切る方向に関して非常に大きいのに対して jet に沿った方向の流速はほとんど一定であると仮定するため, 各方向のダイナミクス構造を分離することができる [1–4]. また jet をはさんだ両側の領域において渦位 (potential vorticity) は互いに異なる値をもち, jet の内部は渦位が急激に変化する渦位境界層 (potential vorticity front) を成している. Thin jet の仮定は, 渦位境界層の厚みがその蛇行のスケールに比して非常に小さいとみることもでき, jet 蛇行のダイナミクスは境界層の運動としてもとらえられる [5–9].

$1^1/_2$ 層モデルに対する渦位境界層ダイナミクスの解析によれば, 境界層の法線方向速度が境界層の曲率に比例することが知られている. さらにこの速度のもとでの海洋前線の方程式 (path equation) は, 曲率に対する modified KdV 方程式で表わされる. この方程式の解のうちブリーザー解が海流の蛇行に対応するものとして, そのダイナミクスが議論されている [10–12].

$1^1/_2$ 層モデルでは海流は深さ方向に一様な流れを仮定している. よって強い流れの領域は海面に対しまっすぐ垂直に立った壁のようになっている. しかし, 実際の海流は深いところで流速が小さくなっており, また, jet が成す位境界層はその蛇行に伴なって深さ方向にも歪みをもっていると考えられる. このように深さ方向に変動をもつ海流のダイナミクスを示唆するものとして, Meacham[9] の 2 層準地衡流モデルにおける渦位境界層のダイナミクスの解析がある. Meacham が double front と呼んでいるケース, すなわち, 上層と下層におのおの 1 枚づつ渦位境界層が存在するとき, 上層と下層の間で境界層蛇行の位相にずれを生じて, 境界層の曲がりが急峻になっていくことが見出されている.

本報告では層モデルではなく深さ方向に連続的な変動をもつ Boussinesq モデルをとりあげ, thin-jet sheet の蛇行ダイナミクスを議論する. まず, $1^1/_2$ 層モデルにおける jet のダイナミクスを [10–12] にしたがって紹介する. つぎに, Boussinesq モデルにおける境界層のダイナミクスを求め, $1^1/_2$ 層モデルとの比較をする.

2 $1^1/_2$ 層モデル

β 面近似の $1^1/_2$ 層モデルは, 水平面 (x, y) 内の流速 (u, v), 層の高さ h に対し,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - (1+\beta y)v = -\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + (1+\beta y)u = -\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{2.3}$$

ここで, 各変数はすでに無次元化されているものとする. 以下, 説明を簡単にするため $\beta = 0$ とする. Cushman-Roisin *et al.* [10], Yosimori[12] では $\beta \neq 0$ の場合も含んだ解析を行なっているが, 導出するダイナミクスは $\beta = 0$ の場合とそれほど違いはない.

この系で非常に細く強い流れ (thin jet) が存在したとする. このとき渦位は薄い境界層を成す. 境界層は (x, y) 平面内の曲線で表わされ, そのダイナミクスは曲線上の各点における曲率の時間発展で記述できる.

[1]e-mail address: hyamada@nagoya.bmc.riken.go.jp
[2]e-mail address: yosimori@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

そこで, この曲線とともに動く曲線座標を導入する. 曲線の弧長を s, 曲線からの距離を n とする. Jet の下流方向に s は増加し, jet 下流に向かって左側に n は増加するとしておく. すると (x, y) 平面内の点は曲線座標 (s, n) を使って表わすことができる. 境界層の位置ベクトルを $\mathbf{r}(s, t)$, この点における接線ベクトルおよび法線ベクトルをおのおの $\mathbf{t}(s, t)$, $\mathbf{n}(s, t)$ と書くことにする. このとき境界層近くの点の位置ベクトルは

$$\mathbf{x}(s, n, t) = \mathbf{r}(s, t) + n\mathbf{n}(s, t) \tag{2.4}$$

と表わされる. また, ベクトル $\mathbf{r}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ の s, t に対する変化は

$$\begin{aligned} &\partial_s \mathbf{r} = \mathbf{t}, && \partial_s \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n}, && \partial_s \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t}, \\ &\partial_t \mathbf{r} = c_s \mathbf{t} + c_n \mathbf{n}, && \partial_t \mathbf{t} = \omega \mathbf{n}, && \partial_t \mathbf{n} = -\omega \mathbf{t}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

と書ける. ここで κ は境界層が成す曲線の曲率, c_s と c_n はおのおの曲線の接線および法線速度, ω は $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$-枠の回転. また, 以下では $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ 方向の流速成分を U, V と表わす.

境界層のダイナミクスを求める際に, 境界層の厚みがその蛇行の幅に比してたいへん小さいものとする. 境界層の薄さを表わす微小パラメータϵ を導入し, 独立変数および従属変数のスケール ϵ に対するオーダーを次のように仮定する：

$$\begin{aligned} &t \sim 1/\epsilon^3, && s \sim 1/\epsilon, && n \sim 1, \\ &U \sim 1, && V \sim \epsilon^2, && h \sim 1, \\ &\kappa \sim \epsilon, && c_s \sim \epsilon^2, && c_n \sim \epsilon^2, && \omega \sim \epsilon^3. \end{aligned}$$

この仮定のもとで従属変数の ϵ に関する漸近展開

$$X = \sum_{m=m_0}^{\infty} \epsilon^m \overset{(m)}{X}$$

を行なう. ただし, m_0 は各変数の ϵ に関して上で仮定したオーダーの次数を表わす. これを方程式 (2.1)–(2.3) に代入し (ただし曲線座標に変換したものとする), ϵ の各次数で摂動方程式を得る.

まず $O(1)$ において方程式 (2.2) より地衡流平衡の関係

$$\overset{(0)}{U} = -\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n} \tag{2.6}$$

を得る. 同じく (2.2) の $O(\epsilon)$ より

$$\overset{(1)}{\kappa}\overset{(0)}{U}{}^2 + \overset{(1)}{U} = -\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial n}. \tag{2.7}$$

ここで曲率 $\overset{(1)}{\kappa}$ を含む項は移流項由来である. さらに $O(\epsilon^2)$ では方程式 (2.1) および (2.3) より

$$\overset{(0)}{U}\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial s} + (\overset{(2)}{V} - \overset{(2)}{c}_n)\frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial n} - \overset{(2)}{V} = -\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s}, \tag{2.8}$$

$$\overset{(0)}{U}\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s} + (\overset{(2)}{V} - \overset{(2)}{c}_n)\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n} + \overset{(0)}{h}\left(\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial s} + \frac{\partial \overset{(2)}{V}}{\partial n}\right) = 0, \tag{2.9}$$

が導かれる. 以上の方程式に対して $\overset{(1)}{U}$ あるいは $\overset{(1)}{h}$ の可解条件が課せられる. ここでは Cushman-Roisin *et al.* [10] に従い, $\overset{(1)}{V}, \partial \overset{(1)}{h}/\partial s \to 0$ $(n \to \infty)$ なる境界条件* を用いる. (2.9) に (2.6), (2.7) を代入すると

$$\overset{(2)}{c}_n \frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left[\overset{(0)}{h}\left(\overset{(1)}{V} - \frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s}\right)\right] - \overset{(0)}{h}\left(\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s},$$

---

*Cushman-Roisin *et al.* では single front と no front というふたつの場合を解析している. ここでは後者の no front と呼ばれる場合についての説明で, 前者の single front ではさらに $\overset{(0)}{h} = 0$ $(n = 0)$ という境界条件が要る. 詳細は [10] 参照.

となるが, 両辺を上で述べた境界条件のもとで $n=-\infty$ から $n=+\infty$ まで積分すれば,

$$\overset{(2)}{c}_n = C_1\frac{\partial\overset{(1)}{\kappa}}{\partial s},\quad C_1=\int\overset{(0)}{h}\left(\frac{\mathrm{d}\overset{(0)}{h}}{\mathrm{d}n}\right)^2\mathrm{d}n\Big/\int\frac{\mathrm{d}\overset{(0)}{h}}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}n \tag{2.10}$$

なる関係を得る. これは境界層が蛇行して曲率が流れ方向に変化を持つとき, その変化率に比例した法線速度で境界層が歪んでいくことを示している. [5,6,10–12]

さらに幾何学的な関係式 (2.5) から得られる積分可能条件と法線速度 (2.10) とを用いて曲率κ のダイナミクスを求めると：[10–12]

$$\frac{\partial\overset{(1)}{\kappa}}{\partial t}=C_1\left(\frac{\partial^3\overset{(1)}{\kappa}}{\partial s^3}+\frac{2}{3}\overset{(1)}{\kappa}{}^2\frac{\partial\overset{(1)}{\kappa}}{\partial s}\right). \tag{2.11}$$

これは modified KdV 方程式であり, 海流の蛇行に関してはソリトン解の一種であるブリーザー解が議論されている. なお β 面の効果は modified KdV 方程式の Galilei 変換に相当する. [10,12]

3 Thin-Jet Sheet のダイナミクス

ここでは境界層 (thin-jet sheet) が深さ方向に変動をもつ場合の海流蛇行のダイナミクスを調べる. モデルには非粘性 Boussinesq 方程式

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}+f_0\boldsymbol{k}\times\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p-\frac{g}{\rho_0}\rho\boldsymbol{k}, \tag{3.1}$$

をとりあげる. ここで $\mathbf{u}=(u,v,w)$ は流速, ρ は密度の平均密度からのずれ, p は圧力. f_0 は Coriolis パラメータ (定数とする), g は重力加速度. $\boldsymbol{k}$ は海底から海面に向かって垂直に立つ単位ベクトル. Lagrange 微分は $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=\partial/\partial t+\mathbf{u}\cdot\nabla$. なお (x,y,z) の各軸は, jet の下流方向, 高緯度方向, 海面に対して垂直方向にとる. 以下では無次元化した表式を用いる：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{k}\times\mathbf{u}=-\nabla p-\Gamma\rho\boldsymbol{k}. \tag{3.2}$$

諸変数の無次元化では次のような変換をした：

$$\frac{\mathbf{r}}{L}\to\mathbf{r},\quad f_0t\to t,\quad \frac{\mathbf{u}}{U_0}\to\mathbf{u},\quad \frac{\rho}{\rho_0}\to\rho,\quad \frac{p}{\rho_0f_0LU_0}\to p,$$
$$R_o=\frac{U_0}{f_0L},\quad \Gamma=\frac{g}{f_0U_0}.$$

ただし, L は jet の幅, U_0 は jet の平均流速, Lagrange 微分は $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=\partial/\partial t+R_o(\mathbf{u}\cdot\nabla)$.

境界層 (境界面) のダイナミクスをみるため, 境界層とともに動く局所曲線座標系をとる. 深さ一定の水平面, すなわち (x,y) 平面上で渦位境界層は曲線を成す. そこで $1\frac{1}{2}$ モデルの場合と同じような座標系を使うことにする. 曲線の弧長を s, 曲線からの距離を n とし, Jet の下流方向に s は増加, jet 下流に向かって左側に n は増加すると定義しておく. 境界層の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(s,z,t)$ と書くと, 境界層近くの点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x}(s,n,z,t)=\boldsymbol{r}(s,z,t)+n\boldsymbol{n}(s,z,t) \tag{3.3}$$

と表わされる. ここで, $\boldsymbol{t}(s,z,t)$, $\boldsymbol{n}(s,z,t)$ はおのおの水平面において境界層が成す曲線の接線, 法線ベクトル. ベクトル $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ の s, z, t に対する変化は次のように表わされる：

$$\begin{aligned}
&\partial_s\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}, && \partial_s\boldsymbol{t}=\kappa\boldsymbol{n}, && \partial_s\boldsymbol{n}=-\kappa\boldsymbol{t}, && \partial_s\boldsymbol{k}=\boldsymbol{o},\\
&\partial_z\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{t}+b\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}, && \partial_z\boldsymbol{t}=\Omega\boldsymbol{n}, && \partial_z\boldsymbol{n}=-\Omega\boldsymbol{t}, && \partial_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{o},\\
&\partial_t\boldsymbol{r}=c_s\boldsymbol{t}+c_n\boldsymbol{n}, && \partial_t\boldsymbol{t}=\omega\boldsymbol{n}, && \partial_t\boldsymbol{n}=-\omega\boldsymbol{t}, && \partial_t\boldsymbol{k}=\boldsymbol{o}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで, κ は曲率, a と b は深さ方向に関する境界層のずれ, Ω は深さ方向に関する $(\mathbf{t},\mathbf{n})$-枠の回転, c_s と c_n は曲線の接線および法線速度, ω は曲線の $\mathbf{k}$-軸まわりの回転速度. これらの幾何的な量の時間発展より境界層のダイナミクスを求めようという考え方は $1\frac{1}{2}$ 層モデルと同様である.

境界層の薄さを表わす微小パラメータ ϵ に対する各変数のスケールを次のように仮定する：

$$\begin{array}{lllllll} t\sim 1/\epsilon^3, & s\sim 1/\epsilon, & n\sim 1, & z\sim 1, & z_1\sim\epsilon^2, & & \\ p\sim 1, & \rho\sim 1, & U\sim 1, & V\sim\epsilon^2, & W\sim\epsilon^2, & & \\ \kappa\sim\epsilon, & c_s\sim\epsilon^2, & c_n\sim\epsilon^2, & \omega\sim\epsilon^3, & a\sim\epsilon, & b\sim\epsilon, & \Omega\sim\epsilon^3. \end{array}$$

ただし, (U,V,W) は $(\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{k})$-枠における流速を表わす. さらに幾何学的量 κ, a, b 等の深さ方向に関する変動は, 変数 z_1 に依存し z に依存しないことを仮定する. 以上の仮定のもとで従属変数の ϵ に関する漸近展開をし, 2 章と同様に各次数で摂動方程式を得る.

まず $O(1)$ において

$$\overset{(0)}{U}=-\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}, \tag{3.5}$$

$$0=-\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial z}-\Gamma\overset{(0)}{\rho}, \tag{3.6}$$

が成立する. これらの方程式はおのおの地衡流平衡, 静水圧平衡を表わしている. つぎに $O(\epsilon)$ で方程式

$$R_o\overset{(1)}{\kappa}\overset{(0)}{U}{}^2+\overset{(1)}{U}=-\frac{\partial\overset{(1)}{p}}{\partial n}, \tag{3.7}$$

$$0=-\left(\frac{\partial\overset{(1)}{p}}{\partial z}-\overset{(1)}{b}\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)-\Gamma\overset{(1)}{\rho}, \tag{3.8}$$

および, $\overset{(0)}{U}$, $\overset{(0)}{\rho}$, $\overset{(0)}{p}$ が s に依存しないという関係を得る. さらに $O(\epsilon^2)$ において,

$$R_o\left[\overset{(0)}{U}\frac{\partial\overset{(1)}{\rho}}{\partial s}+(\overset{(2)}{V}-\overset{(2)}{c_n})\frac{\partial\overset{(0)}{\rho}}{\partial n}\right]=0, \tag{3.9}$$

$$R_o\left[\overset{(0)}{U}\frac{\partial\overset{(1)}{U}}{\partial s}+(\overset{(2)}{V}-\overset{(2)}{c_n})\frac{\partial\overset{(0)}{U}}{\partial n}\right]-\overset{(2)}{V}=-\frac{\partial\overset{(1)}{p}}{\partial s}, \tag{3.10}$$

が導かれる. (3.9), (3.10) から $\overset{(2)}{V}$ を消去し, さらに, (3.5)–(3.8) の関係を使うと $\overset{(1)}{p}$ に対する次のような線型偏微分方程式が求まる：

$$\mathcal{L}\frac{\partial\overset{(1)}{p}}{\partial s}=\frac{\partial^2\overset{(0)}{p}}{\partial n\partial z}\overset{(2)}{c_n}-R_o^2\left(\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^3\frac{\partial^2\overset{(0)}{p}}{\partial n\partial z}\frac{\partial\overset{(1)}{\kappa}}{\partial s}-\left(\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^2\left(R_o\frac{\partial^2\overset{(0)}{p}}{\partial n^2}+1\right)\frac{\partial\overset{(1)}{b}}{\partial s}. \tag{3.11}$$

ここで左辺の線型作用素は

$$\mathcal{L}=\frac{R_o}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^2\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\right]-\frac{\partial\overset{(0)}{p}}{\partial n}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2\overset{(0)}{p}}{\partial n\partial z}. \tag{3.12}$$

方程式 (3.11) の解が存在するとき, 可解条件が成立する. すなわち, もし随伴方程式 $\mathcal{L}^\dagger q=0$ の解 (零固有関数) が存在すれば,

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}n\;qH=0$$

が満たされる. ただし境界条件 $q \to 0$ ($z \to z_\pm$, ここで z_+ は海面, z_- は海底の高さ) $q \to q_\pm$ ($n \to \pm\infty$, ここで q_+, q_- は定数) を仮定し, また H は方程式 (3.11) の右辺 (非斉次項), $\mathcal{L}$ の随伴線型作用素は

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{R_o}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^2\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \overset{(0)}{p}}{\partial n}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\right] + \frac{\partial \overset{(0)}{p}}{\partial n}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2 \overset{(0)}{p}}{\partial n \partial z}.$$

さらに境界条件 $\overset{(0)}{U} \to 0$ ($n \to \pm\infty$) を仮定すると, 可解条件は定数 C_1, C_2 を使って,

$$\overset{(2)}{c_n} = C_1\frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s} + C_2\frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial s}, \tag{3.13}$$

と書き直される. $1^1\!/_2$ 層モデルの境界層ダイナミクスは $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ に対応する. (3.13) の右辺第 2 項 $\partial \overset{(1)}{b}/\partial s$ は境界層の傾きの流れ方向に沿っての変化を表わしており, Jet の蛇行の位相が深さによって差をもつとき, その蛇行を歪めるダイナミクスとして作用することを示唆している.

次に幾何学的な関係式 (3.4) と法線速度 (3.13) から導かれる幾何学量のダイナミクスを求めてみると：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial t} &= C_1\left(\frac{\partial^3 \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s^3} + \frac{3}{2}\overset{(1)}{\kappa}{}^2\frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s}\right) + C_2\left(\frac{\partial^3 \overset{(1)}{b}}{\partial s^3} + \overset{(1)}{\kappa}{}^2\frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial s} + \frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s}\int \overset{(1)}{\kappa}\frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial s}\mathrm{d}s\right),\\
\frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial t} &= C_1\left(\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\kappa}}{\partial z \partial s} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\kappa}{}^2\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s^2}\int \overset{(1)}{\kappa}\overset{(1)}{b}\,\mathrm{d}s\right)\\
&\quad + C_2\left(\frac{\partial^2 \overset{(1)}{b}}{\partial z \partial s} + \frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial s}\int \overset{(1)}{\kappa}\frac{\partial \overset{(1)}{b}}{\partial s}\mathrm{d}s - \frac{\partial^2 \overset{(1)}{b}}{\partial s^2}\int \overset{(1)}{\kappa}\overset{(1)}{b}\,\mathrm{d}s\right),\\
\frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \overset{(1)}{b}}{\partial s^2} + \overset{(1)}{\kappa}{}^2\overset{(1)}{b} + \frac{\partial \overset{(1)}{\kappa}}{\partial s}\int \overset{(1)}{\kappa}\overset{(1)}{b}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$1^1\!/_2$ 層モデルとの対応は, ひとつめの方程式で $C_2 = 0$ とおいたものが modified KdV 方程式 (2.11) になっていることで確かめられる.

4 まとめ

高さ (深さ) 方向の歪みを考慮した境界層 (thin-jet sheet) のダイナミクスの解析をおこなった. 境界層の法線速度は, 従来知られている $1^1\!/_2$ 層モデルにおける曲率の流れに沿った変化率に加え, 境界層の傾きの変化にも依存することを見出した. 境界層 (境界面) の時間発展形態を表わす幾何量のダイナミクスも, $1^1\!/_2$ 層モデルの modified KdV 方程式に対して, 深さ方向の補正がついた形で求めることができた.

しかし, 本報告の解析に関して問題点がいくつか残っている. ひとつは境界層のダイナミクスを決めている法線速度 (3.13) について係数 C_1, C_2 の符号が確定されていないことである. これを決めるには, jet の流速分布および随伴線型作用素 $\mathcal{L}^\dagger$ の零固有関数 q を与えなければならない. しかし, q の存在については証明できていない. あるいは Cushman-Roisin *et al.* の解析 [10] のごとく, 流速や密度分布の境界条件をうまく利用して C_1, C_2 の符号が決定できる可能性もある. その場合は補遺 A の表式を用いれば見通し良く解析できるであろう.

もうひとつの問題は, 幾何量の深さ方向依存性に対してゆっくりしたスケールを仮定したこと. この仮定があるために可解条件 (3.13) は幾何量 κ, b に関しての簡単な依存性をもつ形に書けている. しかし, この仮定が密度や流速などの物理量の変化のスケールに対して整合性をもっているのかという点は疑問である. 多層モデルでひとつの層 (layer) にひとつづつ境界層 (interface) がある場合, となりあう層で境界層がどのような配置をとりうるか調べれば, スケーリングの整合性の判断に関する手がかりが見つかるかもしれない.

第 3 章で示した (3.13) の結果を導く過程は, $1^1\!/\!_2$ 層モデルに対して深さの変動による補正項がいかように現われているか分かりにくい形になっている. この点は 3 章の解析を等密度面モデルへ変換して書き下せば少しは見通しがよくなる. 補遺 A に概要をまとめておく.

A 層モデルとの比較

第 3 章の (3.13), (3.14) が本報告の主要な結果であるが, これらを導出する解析過程を $1^1\!/\!_2$ 層モデルと比較するとき, その対応はたいへん分かりにくい. ここでは等密度面の方程式を使ってその対応を考えてみる.

まず ρ を z の代わりに新たな独立変数とし, 等密度面 $h(s,n,\rho,t)$ は密度 ρ の面の高さを表わすことにする. これら新しい変数への変換はつぎの置き換えに従えばよい：

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial h/\partial x}{\partial h/\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} \to -\frac{\partial h/\partial x}{\partial h/\partial \rho},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} \to \quad +\frac{1}{\partial h/\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \to +\frac{1}{\partial h/\partial \rho},$$

ただし $f = p, U, V, W$, および $x = t, s, n$.

$O(1)$ の地衡流平衡と静水圧平衡の方程式は

$$\overset{(0)}{U} = -\frac{\partial \overset{(0)}{p}}{\partial n} - \Gamma\rho\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n}, \tag{A.1}$$

$$0 = -\frac{\partial \overset{(0)}{p}}{\partial \rho} - \Gamma\rho\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial \rho}. \tag{A.2}$$

これらより温度風平衡$\partial\overset{(0)}{U}/\partial\rho = -\Gamma\partial\overset{(0)}{h}/\partial n$ の関係が得られる. つぎに $O(\epsilon)$ において

$$R_o\kappa \overset{(1)(0)}{U^2} + \overset{(1)}{U} = -\frac{\partial \overset{(1)}{p}}{\partial n} - \Gamma\rho\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial n} - \overset{(1)(0)}{bU}\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n}, \tag{A.3}$$

$$0 = -\frac{\partial \overset{(1)}{p}}{\partial \rho} - \Gamma\rho\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial \rho} + \overset{(1)(0)}{bU}\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial \rho}, \tag{A.4}$$

および $\overset{(0)}{h}, \overset{(0)}{U}, \overset{(0)}{p}$ が s に依存しないという結果を得る. さらに $O(\epsilon^2)$ において,

$$R_o\left[\overset{(0)}{U}\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial s} + (\overset{(2)}{V} - \overset{(2)}{c_n})\frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial n}\right] - \overset{(2)}{V} = -\Gamma\rho\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s} - \frac{\partial \overset{(1)}{p}}{\partial s}. \tag{A.5}$$

$$R_o\left[\overset{(0)}{U}\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s} + (\overset{(2)}{V} - \overset{(2)}{c_n})\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n}\right] - R_o\overset{(2)}{W} = 0, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial s} + \frac{\partial \overset{(2)}{V}}{\partial n}\right) - \left(\frac{\partial \overset{(1)}{h}}{\partial s}\frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial \rho} + \frac{\partial \overset{(0)}{h}}{\partial n}\frac{\partial \overset{(2)}{V}}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial \overset{(2)}{W}}{\partial \rho} = 0. \tag{A.7}$$

(A.5) が (2.8) に, また (A.6) と (A.7) とを連立させたものが (2.9) に対応している. 後者の対応は (A.7) を ρ で積分し $\overset{(0)}{W}$ について解き (A.6) へ代入して得られる方程式を (2.9) と比較すればよいが, この両方程式の差はかなり複雑な形をしている. その複雑さが座標系等のとりかたに起因しているか否かは不明である.

参考文献

[1] B. A. Warren, Tellus **15** (1963) 167–183.

[2] A. R. Robinson and P. P. Niiler, Tellus **19** (1967) 269–291.

[3] A. R. Robinson, J. R. Luyten and G. Flierl, Geophys. Fluid Dyn. **6** (1975) 211–244.

[4] G. R. Flierl and A. R. Robinson, J. Phys. Oceanogr. **14** (1984) 412–423.

[5] L. J. Pratt and M. E. Stern, J. Phys. Oceanogr. **16** (1986) 1101–1120.

[6] L. J. Pratt, J. Phys. Oceanogr. **18** (1988) 1627–1640.

[7] L. M. Polvani, G. R. Flierl and N. J. Zabusky, J. Fluid Mech. **205** (1989) 215–242.

[8] J. Pedlosky, J. Phys. Oceanogr. **20** (1990) 235–240.

[9] S. P. Meacham, J. Phys. Oceanogr. **21** (1991) 1139–1170.

[10] B. Cushman-Roisin, L. Pratt and E. Ralph, J. Phys. Oceanogr. **23** (1993) 91–103.

[11] J. Nycander, D. G. Dritschel and G. G. Sutyrin, Phys. Fluids A **5** (1993) 1089–1091.

[12] A. Yoshimori, J. Oceanogr. **49** (1993) 521–533.